

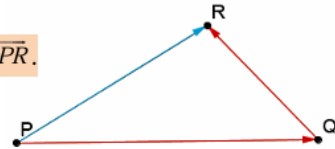
Vectori în plan. Coliniaritate și paralelism

• Egalitatea vectorilor.

Doi vectori sunt egali dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime (mărime, modul).

• Regula triunghiului sau relația lui Chasles.

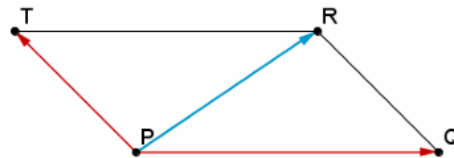
Oricare ar fi trei puncte P, Q, R în plan, are loc egalitatea: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.



• Regula paralelogramului

Fie $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$ și $\overrightarrow{PT} = \vec{v}$. Construim paralelogramul $PQRT$.

Atunci $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$



• Vectori coliniari

Doi vectori se numesc **coliniari** dacă au aceeași direcție. Acest lucru se întâmplă în două cazuri:

- când ambii vectori sunt nenuli și dreptele lor suport sunt paralele sau coincid;
- când cel puțin unul dintre cei doi vectori este nul.

„Paralelismul” vectorilor reprezintă, așadar, un caz particular al coliniarității lor, lucru explicabil prin faptul că vectorii liberi nu au o poziție fixă și pot fi translați în orice punct al planului.

Teoremă. Fie \vec{u} un vector nenul și \vec{v} un vector oarecare.

1) Dacă \vec{u} și \vec{v} sunt coliniari, atunci există un număr real λ , unic, astfel încât $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

2) Dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, atunci \vec{u} și \vec{v} sunt coliniari.

• **Descompunerea unui vector după direcțiile a doi vectori necoliniari dați.** Fie \vec{a} și \vec{b} doi vectori necoliniari. Oricare ar fi vectorul \vec{v} din plan, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$. Scalarii α și β cu această proprietate sunt unici.

• **Teorema bisectoarei.** Fie triunghiul ABC și $[AD]$ bisectoarea unghiului A , unde $D \in [BC]$. Atunci avem:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

• **Vectori de poziție**

Fie O un punct în plan, fixat. Fiecărui punct M din plan i se asociază vectorul $\vec{r}_M = \vec{OM}$, numit vectorul său de poziție.

➤ Dacă $\frac{\vec{AM}}{\vec{MB}} = k$, atunci $\vec{r}_M = \frac{1}{k+1} \vec{r}_A + \frac{k}{k+1} \vec{r}_B$. În particular, dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$,

avem $\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$.

➤ Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci $\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}$.

➤ Dacă I este punctul de intersecție al bisectoarelor triunghiului ABC și a, b, c sunt lungimile laturilor lui, atunci $\vec{r}_I = \frac{a\vec{r}_A + b\vec{r}_B + c\vec{r}_C}{a + b + c}$.

• **Relația lui Sylvester**

Fie H ortocentrul și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Atunci: $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

• **Teorema lui Menelaus și reciproca ei**

Fie ABC un triunghi și M, N, P puncte astfel încât $M \in (AB), N \in (BC), P \in (AC)$. Atunci M, N și P sunt

coliniare dacă și numai dacă $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$.

• **Teorema lui Ceva și reciproca ei**

Fie ABC un triunghi și M, N, P puncte astfel încât $M \in (AB), N \in (BC), P \in (AC)$. Atunci dreptele AN, BP și

CM sunt **concurente** dacă și numai dacă $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$.

• **Produsul scalar.** Pentru orice doi vectori nenuli \vec{v}_1, \vec{v}_2 , numărul real $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \alpha$, unde $\alpha = m(\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2))$ se numește **produsul scalar al vectorilor** \vec{v}_1 și \vec{v}_2 . Dacă \vec{v}_1 sau \vec{v}_2 este nul, atunci prin definiție produsul scalar $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ este nul.

Avem:

➤ $\vec{v}^2 = |\vec{v}|^2$

➤ Dacă \vec{v}_1 și \vec{v}_2 sunt vectori nenuli, atunci: $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

Vectori într-un reper cartezian

Fie xOy un reper cartezian fixat.

• Coordonatele unui vector

Definiție. Se numește **versorul axei Ox** vectorul \vec{i} de lungime 1, cu aceeași direcție și același sens ca axa Ox. Analog se definește **versorul axei Oy**, notat cu \vec{j} .

Avem $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ și $\vec{i} \perp \vec{j}$.

Teoremă. Pentru orice vector \vec{v} din plan, există o unică pereche de numere reale a și b astfel încât $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Definiție. Numerele a și b din teorema de mai sus se numesc **coordonatele lui** \vec{v} . Notăm, pe scurt, $\vec{v}(a, b)$.

Prin urmare, avem $\vec{v}(a, b)$ dacă și numai dacă $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Observație. Din teoremă rezultă că pentru $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avem:

$$a\vec{i} + b\vec{j} = c\vec{i} + d\vec{j} \Leftrightarrow (a = c \text{ și } b = d)$$

• Legătura dintre coordonatele vectorilor și coordonatele punctelor

Fie punctul $M(x_M, y_M)$. Atunci $\vec{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j}$, deci $\vec{OM}(x_M, y_M)$. Cu alte cuvinte, coordonatele vectorului de poziție al unui punct coincid cu coordonatele aceluși punct.

Teoremă. Fie punctele $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$. Atunci vectorul \vec{AB} are coordonatele $(x_B - x_A, y_B - y_A)$, adică $\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$.

Deci $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Aplicație. Fie patrulaterul ABCD. Atunci :

$$\text{ABCD este paralelogram} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$$



• Condiția de coliniaritate a doi vectori

Reamintim că doi vectori se numesc **coliniari** dacă au aceeași direcție. Acest lucru se întâmplă în două cazuri:

- când ambii vectori sunt nenuli și dreptele lor suport sunt paralele sau coincid;
- când cel puțin unul dintre cei doi vectori este nul.

„Paralelismul” vectorilor reprezintă, așadar, un caz particular al coliniarității lor, lucru explicabil prin faptul că vectorii liberi nu au o poziție fixă și pot fi translați în orice punct al planului.

Teoremă. Vectorii nenuli $\vec{v}(a, b)$ și $\vec{v}'(a', b')$ sunt coliniari dacă și numai dacă numerele a și b sunt direct proporționale cu a' și b' .

Dacă $b \neq 0$ și $b' \neq 0$, avem: $\vec{v}(a, b)$ și $\vec{v}'(a', b')$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

Observație. Mai general, vectorii $\vec{v}(a, b)$ și $\vec{v}'(a', b')$ sunt coliniari $\Leftrightarrow ab' = a'b$. Această condiție include și cazul în care cel puțin unul dintre vectori este nul.

• Produsul scalar. Modulul unui vector.

Definiție. Fie α măsura unghiului dintre vectorii \vec{v} și \vec{v}' , $\alpha \in [0, \pi]$. Prin definiție, **produsul scalar** al celor doi vectori este

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}'| \cdot \cos \alpha$$

Teoremă. Fie $\vec{v}(a, b)$ și $\vec{v}'(a', b')$. Atunci $\vec{v} \cdot \vec{v}' = aa' + bb'$.

Consecință. Fie $\vec{v}(a, b)$. Atunci $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

• Unghiul a doi vectori. Condiția de perpendicularitate.

Fie α măsura unghiului dintre vectorii nenuli $\vec{v}(a, b)$ și $\vec{v}'(a', b')$. Atunci:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}'|} = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

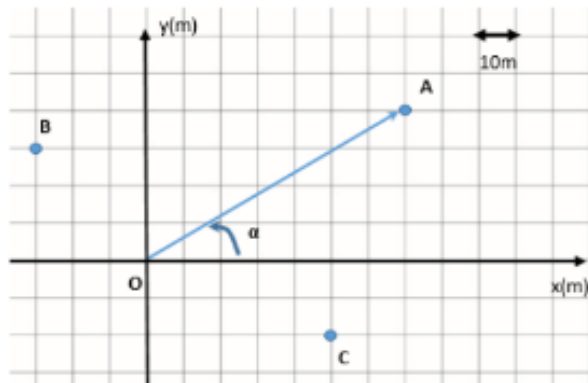
Teoremă. Fie doi vectori nenuli $\vec{v}(a, b)$ și $\vec{v}'(a', b')$. Avem: $\vec{v}(a, b) \perp \vec{v}'(a', b') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$

Aplicații propuse:

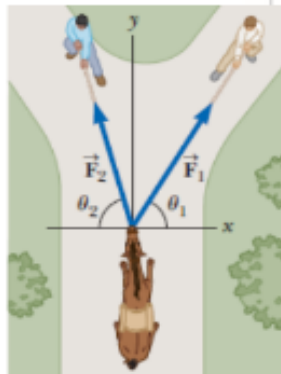
1. Fie $ABCD$ un pătrat de latură $4\sqrt{2}$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
2. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AC \cap BD = \{O\}$. Demonstrați că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
3. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu ipotenuza $BC = 8$, iar M mijlocul ipotenuze. Calculați modulul vectorului $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
4. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a . Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.
5. Dacă triunghiul ABC este echilateral de latură 3, determinați norma vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
6. Fie dreptunghiul $ABCD$. Demonstrați că vectorii $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ au modulele egale.
7. Dacă $ABCD$ este un paralelogram, iar P un punct din planul paralelogramului, demonstrați că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$.
8. Dacă $ABCD$ este un paralelogram cu $AC \cap BD = \{O\}$, demonstrați că, pentru orice punct P din plan, are loc $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}$.
9. Fie $ABCD$ un paralelogram, iar punctul O intersecția diagonalelor sale. Dacă M este mijlocul laturii AB , iar N este mijlocul laturii CD , demonstrați că $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.
10. Se consideră triunghiul ABC , M mijlocul laturii BC , iar P mijlocul laturii AC . Demonstrați că vectorii $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MP}$ sunt coliniari.
11. Fie M mijlocul segmentului $[AB]$ iar P mijlocul segmentului $[AM]$. Demonstrați că are loc relația $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.
12. Fie rombul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$. Demonstrați că vectorii $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ și \overrightarrow{CD} au același modul.
13. Considerăm patrulaterul $ABCD$, M mijlocul laturii AB iar N mijlocul laturii CD . Demonstrați că $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.
14. Fie triunghiul ABC , M mijlocul laturii BC , N mijlocul medianei AM , iar $P \in [AC]$ astfel încât $PC = 2PA$. Demonstrați că punctele B, N și P sunt coliniare.
15. Se consideră punctele M, N, P și Q astfel încât $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}$. Demonstrați că punctele N și P coincid.
16. Se consideră triunghiul ABC , G centrul său de greutate, M astfel încât $4\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}$ și N astfel încât $5\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CA}$. Arătați că punctele M, N și G sunt coliniare.
17. Fie vectorii $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = 5\vec{i} - 7\vec{j}$. Calculați modulul vectorului \overrightarrow{AC} .
18. Fie vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$. Calculați $\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$.
19. În reperul cartezian xOy , se consideră $A(1, -1)$ și $B(3, 5)$. Determinați coordonatele punctului C din plan, pentru care $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.
20. Determinați numerele reale x și y , știind că vectorii $\vec{u} = (2x + 1)\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + (y + 1)\vec{j}$ sunt egali.

Vectori – Fișă de lucru

1. Se consideră sistemul de axe de coordonate cartezian alăturat în care avem punctele A, B, C. Calculați: a) Modulul vectorilor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ și orientarea lor față de axa Ox. b) Exprimați vectorii în funcție de versorii axelor de coordonate \vec{i} și \vec{j} . c) Calculați $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. d) Calculați $\vec{a} - \vec{c}$. e) Calculați $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}$

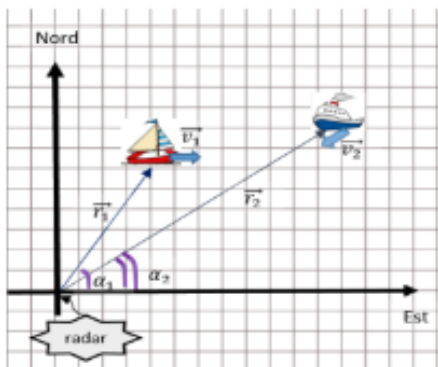


2. $F_1 = 120N$, $F_2 = 80N$, $\theta_1 = 60^\circ$, $\theta_2 = 75^\circ$. a) Calculați rezultanta celor două forțe. b) Ce valoare are și cum trebuie orientată o a treia forță astfel încât să anuleze efectul celor două?

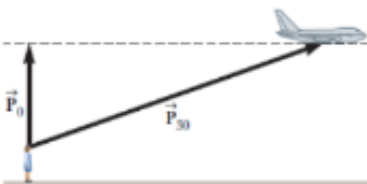


3. Se consideră vectorii $\vec{a} = 8\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{b} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$. a) Calculați modulul fiecărui vector. b) Desenați vectorii. c) Calculați unghiul dintre vectori. d) Calculați produsul scalar și produsul vectorial al vectorilor.

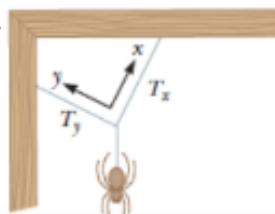
4. Pozițiile a două nave sunt recepționate de o stație radar aflată într-un port. Radarul recepționează poziția primei nave $r_1 = 150 \text{ km}$, $\alpha_1 = 65^\circ$, și a celei de a doua nave $r_2 = 200 \text{ km}$, $\alpha_2 = 40^\circ$. Vectorii \vec{r}_1 și \vec{r}_2 se numesc vectori de poziție. a) Calculați distanța dintre cele două nave. b) Desenați vectorul $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. c) Dacă cele două nave au vitezele, respectiv prima navă $v_1 = 50 \text{ km/h}$ orientată spre Est și a doua navă, $v_2 = 60 \text{ km/h}$ orientată pe direcția \vec{r}_2 (vezi figura 1.20) Calculați distanța dintre cele două nave după 11 minute. Dacă direcțiile de mers se mențin, există posibilitatea ca navele să se ciocnească?



5. Un avion zboară cu viteză constantă la înălțime constantă $h = 7,6 \cdot 10^3 \text{ m}$ deasupra unei persoane considerată centrul axelor de coordonate. La momentul $t = 0 \text{ s}$ avionul se află chiar deasupra capului iar la $t = 30 \text{ s}$ poziția avionului este descrisă de vectorul $\vec{P}_{30} = 8,04 \cdot 10^3 \vec{i} + 7,6 \cdot 10^3 \vec{j}$. Determinați poziția și orientarea avionului la $t = 45 \text{ s}$



6. Un controlor de trafic aerian observă două avioane pe ecranul radarului, primul la înălțimea de 800m, distanță orizontală de 19,2m și 25° sud-vest, al doilea este la 1100m altitudine, distanță orizontală de 17,6m și 20° sud-vest. Care este distanța dintre cele două avioane?



7. Un paianjen stă agățat prin intermediul a 3 fire. Forța gravitațională exercitată asupra paianjenului este $G = 0,15 \text{ N}$. Cele două fire x, și y sunt perpendiculare între ele iar tensiunea în firul x este $T_x = 0,127 \text{ N}$. a) Calculați T_y . b) Calculați unghiurile pe care firele x și y le face cu orizontala.